

4 Zuverlässigkeit von Netzwerken

Wir betrachten Mehrkomponentennetzwerke. Diese werden durch Zuverlässigkeitsschaltbilder dargestellt. Dies sind Graphen, die zur Zuverlässigkeitsanalyse von Netzwerken (Systemen) herangezogen werden. Es sind sogenannte **bi-terminale orientierte Graphen**, d. h., sie besitzen zwei Enden, $\gg I \ll$ für Input und $\gg O \ll$ für Output – wenn diese nicht eingezeichnet sind, liegt der Input immer links, der Output immer rechts – und eine Richtung, die vom Input zum Output führt – die i. A. aber nicht eingezeichnet wird und wieder von links nach rechts zeigt. Diese Richtung bezeichnet die Richtung des Strom- bzw. Datenflusses.

Bei Zuverlässigkeitsschaltbildern ist – im Gegensatz zu technischen Schaltbildern – die mehrfache Darstellung einer Komponente erlaubt, es gilt jedoch die Vereinbarung, dass sich identisch bezeichnete Komponenten auch identisch verhalten, d. h., es sind entweder alle gleichzeitig defekt oder gleichzeitig intakt.

Bei den einzelnen Komponenten kann es sich z. B. um ein Mehrkreisbremssystem bei Fahrzeugen handeln, drei unabhängige Computer in Flugzeugen, bzw. fünf im Space-Shuttle, die die Flugdaten auswerten und die Fluglage auf Grund eines Mehrheitsbeschlusses kontrollieren. Ebenso können diese Komponenten aber Programmmodule eines Computerprogramms, oder etwa Lieferfirmen in einem Produktionsnetz, oder Personen in einem sozialen Netz etc. sein.

Um nun die Wahrscheinlichkeit für das Funktionieren (System intakt), bzw. die Ausfallswahrscheinlichkeit (System defekt) eines Netzwerkes berechnen zu können, einigen wir uns zuvor auf folgende Notation.

Notation und Voraussetzungen:

K_i	Komponente i , $i = 1, 2, 3, \dots$
A_i	Das Ereignis, dass Komponente K_i funktioniert.
A_i^c	Das Ereignis, dass Komponente K_i defekt ist.
$P(A_i) = p_i$	Zuverlässigkeit der Komponente K_i (<i>Reliability</i>).
$P(A_i^c) = 1 - p_i$	Ausfallswahrscheinlichkeit der Komponente K_i .

Weiters sei vorausgesetzt, dass sich alle Komponenten unabhängig voneinander verhalten, d. h., der Ausfall einer Komponente sich nicht auf die Zuverlässigkeit (das Verhalten) der anderen Komponenten auswirkt, d. h., die Zufallsvariablen, die für die einzelnen Komponenten stehen, sind unabhängig. Dies ist bei reellen Schaltungen nicht immer – wenn nicht sogar selten – der Fall, da der Ausfall einer Komponente die restlichen mehr belasten kann (etwa bei einem Mehrkreisbremssystem). Außerdem gehen wir von sogenannten **monotonen Systemen** aus, d. h., von Systemen, deren Zuverlässigkeit beim Ausfall einer Komponente nicht größer wird.

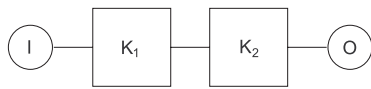


Abb. 1: Serienschaltung

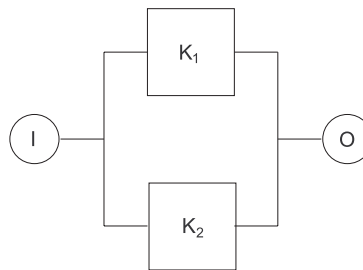


Abb. 2: Parallelschaltung

Serienschaltung

Für die Serienschaltung in Abbildung 1 gilt:

- Die Schaltung ist intakt, wenn beide Komponenten gleichzeitig funktionieren, d. h.

$$P(\text{intakt}) = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = p_1 p_2$$

- Die Serienschaltung funktioniert nicht, wenn mindestens eine Komponente defekt ist, d. h., entweder Komponente 1 oder Komponente 2 defekt ist. Die Ausfallswahrscheinlichkeit ergibt sich somit als

$$\begin{aligned} P(\text{defekt}) &= P(A_1^c \cup A_2^c) \\ &= P(A_1^c) + P(A_2^c) - P(A_1^c) \cdot P(A_2^c) \\ &= (1 - P(A_1)) + (1 - P(A_2)) - (1 - P(A_1)) \cdot (1 - P(A_2)) \\ &= (1 - P(A_1)) + (1 - P(A_2)) - (1 - P(A_1) - P(A_2) + P(A_1) \cdot P(A_2)) \\ &= 1 - P(A_1) \cdot P(A_2) \\ &= 1 - p_1 p_2 \end{aligned}$$

Wenn wir oben zuerst die Rechenregeln für Mengen anwenden, erhalten wir (natürlich) ebenfalls

$$\begin{aligned} P(\text{defekt}) &= P(A_1^c \cup A_2^c) = P((A_1 \cap A_2)^c) \\ &= 1 - P(A_1 \cap A_2) = 1 - P(A_1) \cdot P(A_2) \\ &= 1 - p_1 p_2 \end{aligned}$$

Selbverständlich gilt

$$P(\text{intakt}) + P(\text{defekt}) = 1$$

Systemstrukturfunktion

Die **Systemstrukturfunktion** $\varphi(S)$ zeigt an, ob ein System S funktioniert, notiert durch $\varphi(S) = 1$, oder nicht, also $\varphi(S) = 0$. Sei nun k_i die zur Komponente K_i gehörige boolesche Variable, die anzeigt, ob diese Komponente funktioniert, $k_i = 1$, oder defekt ist, $k_i = 0$.

Betrachten wir die Wahrheitstabelle der Serienschaltung

k_{j1}	k_{j2}	$\varphi(k_{j1}, k_{j2})$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

so erhalten wir die Systemstrukturfunktion aus der Addition all jener Terme, bei denen das System funktioniert, in der dritten Spalte also $\gg 1 \ll$ steht, d. h., wir sehen, dass

$$\varphi(S) = \varphi(k_{j1}, k_{j2}) = \min(k_{j1}, k_{j2}) = k_{j1} \cdot k_{j2}$$

die Systemstrukturfunktion für die Serienschaltung aus Abbildung 1 ist.

Bezeichnen wir die Werte von k_{ji} , d. h. die Einträge in der Tabelle, mit w_{ji} (j -te Zeile, i -te Spalte), so erhalten wir aus der **disjunktiven Normalform der Systemstrukturfunktion**

$$\varphi(k_{j1}, \dots, k_{jn}) = \sum_{j=1}^n \left[\prod_{i=1}^n k_{ji}^{w_{ji}} (1 - k_{ji})^{1-w_{ji}} \right] \varphi(w_{j1}, \dots, w_{jn})$$

die folgende Darstellung für die obige Serienschaltung

$$\begin{aligned} \varphi(k_{11}, \dots, k_{42}) &= \sum_{j=1}^2 (k_{j1}^{w_{j1}} (1 - k_{j1})^{1-w_{j1}} k_{j2}^{w_{j2}} (1 - k_{j2})^{1-w_{j2}}) \cdot \varphi(w_{j1}, w_{j2}) \\ &= (k_{11}^1 (1 - k_{11})^{1-1} k_{12}^1 (1 - k_{12})^{1-1}) \cdot 1 + (k_{21}^1 (1 - k_{21})^{1-1} k_{22}^0 (1 - k_{22})^{1-0}) \cdot 0 \\ &\quad + (k_{31}^0 (1 - k_{31})^{1-0} k_{32}^1 (1 - k_{32})^{1-1}) \cdot 0 + (k_{41}^0 (1 - k_{41})^{1-0} k_{42}^0 (1 - k_{42})^{1-0}) \cdot 0 \\ &= k_{11} k_{12} \cdot 1 + k_{21} (1 - k_{22}) \cdot 0 + (1 - k_{31}) k_{32} \cdot 0 + (1 - k_{41}) (1 - k_{42}) \cdot 0 \\ &= k_{11} k_{12} \end{aligned}$$

d. h., es werden all jene Zeilen in der Tabelle addiert, in denen rechts bei der Systemstrukturfunktion der Wert $\gg 1 \ll$ steht, wobei die Faktoren links den Wert k_i haben, falls $\gg 1 \ll$ in der zugehörigen Spalte steht, bzw. $(1 - k_i)$, falls $\gg 0 \ll$ in der zugehörigen Spalte steht.

In folgender Tabelle haben wir obige Tabelle um die Spalten für die Systemstrukturfunktion und die dazu gehörige **Systemzuverlässigkeitsfunktion** für die booleschen

Zustände links hinzugefügt. Achtung! Obwohl beide Spalten ähnlich (gleich) aussehen, bezeichnet doch die Systemstrukturfunktion eine boolesche Funktion mit den Werten oder Zuständen 0 und 1, während die Systemzuverlässigkeitsfunktion eine Wahrscheinlichkeitsfunktion ist und $0 \leq P(S = \text{intakt}) \leq 1$ gilt. Allerdings erleichtert diese Ähnlichkeit die Berechnung.

k_1	k_2	$\varphi(k_1, k_2)$	Struktur	Zuverlässigkeit
1	1	1	$k_1 k_2$	$p_1 p_2$
1	0	0	$k_1(1 - k_2)$	$p_1(1 - p_2)$
0	1	0	$(1 - k_1)k_2$	$(1 - p_1)p_2$
0	0	0	$(1 - k_1)(1 - k_2)$	$(1 - p_1)(1 - p_2)$

Daher erhalten wir als Systemzuverlässigkeitsfunktion

$$P(S = \text{intakt}) = P(\varphi(S) = 1) = p_1 p_2$$

als Wahrscheinlichkeit dafür, dass das System funktioniert.

Die Ausfallswahrscheinlichkeit ist

$$\begin{aligned} P(\varphi(S) = 0) &= p_1(1 - p_2) + (1 - p_1)p_2 + (1 - p_1)(1 - p_2) \\ &= 1 - p_1 p_2 \end{aligned}$$

das ist die Wahrscheinlichkeit, dass das System defekt ist.

Allgemein haben wir für eine Serienschaltung S aus n Komponenten

Strukturfunktion	$\varphi(k_1, \dots, k_n)$	$= \min_i \{k_i\} = \prod_{i=1}^n k_i$
Zuverlässigkeit	$P(\varphi(S) = 1)$	$= \prod_{i=1}^n p_i$
Ausfall	$P(\varphi(S) = 0)$	$= 1 - \prod_{i=1}^n p_i$

Parallelschaltung

Für die Parallelschaltung in Abbildung 2 gilt:

- Die Schaltung ist intakt, wenn mindestens eine Komponente funktioniert, d. h., entweder Komponente 1 oder Komponente 2 intakt ist

$$\begin{aligned} P(\text{intakt}) &= P(A_1 \cup A_2) \\ &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1) \cdot P(A_2) \\ &= 1 - (1 - P(A_1)) \cdot (1 - P(A_2)) \\ &= 1 - (1 - p_1)(1 - p_2) \end{aligned}$$

- Die Parallelschaltung in Abbildung 2 funktioniert nicht, wenn keine Komponente funktioniert, d. h., wenn beide defekt sind. Es gilt daher

$$\begin{aligned}
 P(\text{defekt}) &= P(A_1^c \cap A_2^c) \\
 &= P((A_1 \cup A_2)^c) \\
 &= 1 - (P(A_1) + P(A_2) - P(A_1) \cdot P(A_2)) \\
 &= (1 - P(A_1)) \cdot (1 - P(A_2)) \\
 &= (1 - p_1)(1 - p_2)
 \end{aligned}$$

Selbverständlich gilt wieder

$$P(\text{intakt}) + P(\text{defekt}) = 1$$

Betrachten wir auch hier die Tabelle der Systemstrukturfunktion und der dazu gehörigen Systemzuverlässigkeitsfunktion

k_1	k_2	$\varphi(k_1, k_2)$	Struktur	Zuverlässigkeit
1	1	1	$k_1 k_2$	$p_1 p_2$
1	0	1	$k_1(1 - k_2)$	$p_1(1 - p_2)$
0	1	1	$(1 - k_1)k_2$	$(1 - p_1)p_2$
0	0	0	$(1 - k_1)(1 - k_2)$	$(1 - p_1)(1 - p_2)$

so erhalten wir aus der disjunktiven Normalform die Systemstrukturfunktion für die Parallelschaltung

$$\begin{aligned}
 \varphi(k_1, k_2) &= \max(k_1, k_2) \\
 &= k_1 k_2 + k_1(1 - k_2) + (1 - k_1)k_2 \\
 &= k_1 + k_2 - k_1 k_2 \\
 &= 1 - (1 - k_1)(1 - k_2)
 \end{aligned}$$

und analog dazu die Systemzuverlässigkeitsfunktion

$$P(\varphi(S) = 1) = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2)$$

und die Ausfallswahrscheinlichkeit wie oben

$$P(\varphi(S) = 0) = (1 - p_1)(1 - p_2)$$

Allgemein haben wir für eine Parallelschaltung S aus n Komponenten

Strukturfunktion	$\varphi(k_1, \dots, k_n) = \max_i \{k_i\} = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - k_i)$
Zuverlässigkeit	$P(\varphi(S) = 1) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i)$
Ausfall	$P(\varphi(S) = 0) = \prod_{i=1}^n (1 - p_i)$

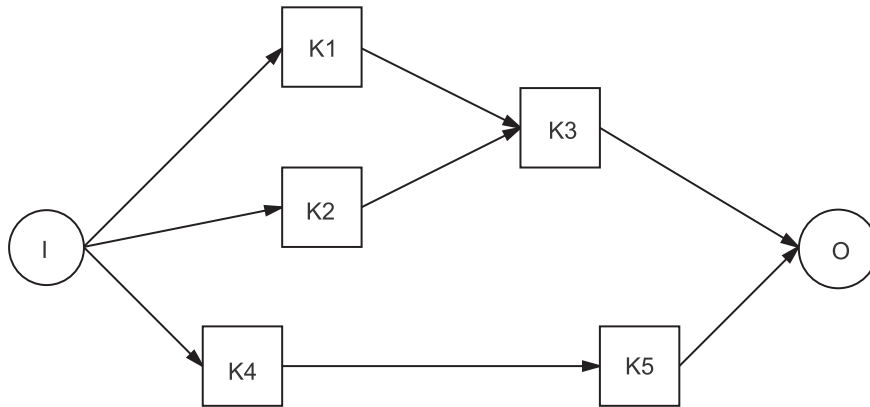


Abb. 3: Serien-parallele Schaltung mit 5 Komponenten

Komplexere serienparallele Schaltungen

Die Zuverlässigkeit der Serienparallelschaltung in Abbildung 3 erhalten wir, indem wir entweder eine Wahrheitstabelle aufstellen und die Strukturfunktion oder gleich die Zuverlässigkeit berechnen, oder die Zuverlässigkeit der einzelnen Teilsysteme berechnen und zusammenfassen. K1 und K2 sind parallel geschaltet, daher ergibt sich die Zuverlässigkeit zu $1 - (1 - p_1)(1 - p_2)$ und in Serie zu K3, d. h., der obere Ast hat Zuverlässigkeit $(1 - (1 - p_1)(1 - p_2))p_3$, der untere Ast p_4p_5 . Der obere und der untere Ast sind parallel geschaltet, daher ergibt sich als Zuverlässigkeit des Gesamtsystems

$$1 - [1 - (1 - (1 - p_1)(1 - p_2))p_3] \cdot [1 - p_4p_5]$$

Die Brückenschaltung

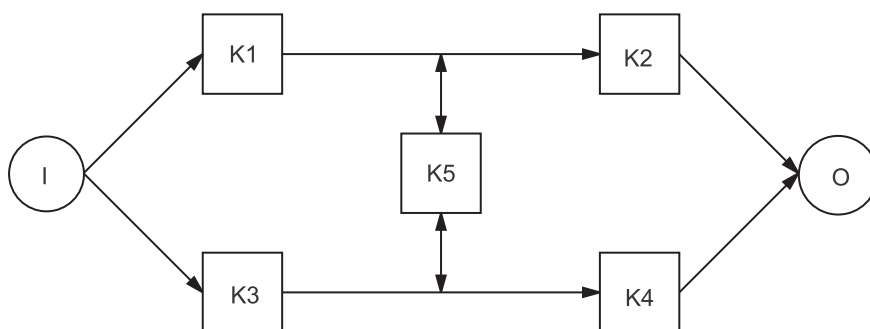


Abb. 4: Brückenschaltung

Bei der Brückenschaltung in Abbildung 4 kann der Stromfluss die Komponente K5 in beide Richtungen durchlaufen, die Hauptflussrichtung ist jedoch wie bei jedem Zuverlässigkeitsschaltbild von links nach rechts. Die Brückenschaltung ist keine serienparallele Schaltung!

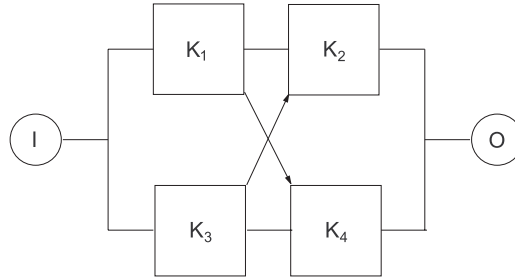


Abb. 5: Nicht-serienparallele Schaltung

Nicht-serienparallele Schaltungen

Nicht-serienparallele Schaltungen können zuverlässig nur über ihre Systemzugehörigkeitsfunktion beschrieben bzw. berechnet werden. Eine Unterteilung in serienparallele Schaltungen funktioniert hierbei nicht.

Für die Schaltung aus Abbildung 5 ergibt sich folgende Wahrheitstabelle mit der Systemzuverlässigkeitsfunktion für die einzelnen Zustände

Zeile	k_1	k_2	k_3	k_4	$\varphi(k_1, k_2, k_3, k_4)$	$P(\varphi(k_1, k_2, k_3, k_4))$
1	1	1	1	1	1	$p_1 p_2 p_3 p_4$
2	1	1	1	0	1	$p_1 p_2 p_3 (1 - p_4)$
3	1	1	0	1	1	$p_1 p_2 (1 - p_3) p_4$
4	1	1	0	0	1	$p_1 p_2 (1 - p_3) (1 - p_4)$
5	1	0	1	1	1	$p_1 (1 - p_2) p_3 p_4$
6	1	0	1	0	0	$p_1 (1 - p_2) p_3 (1 - p_4)$
7	1	0	0	1	1	$p_1 (1 - p_2) (1 - p_3) p_4$
8	1	0	0	0	0	$p_1 (1 - p_2) (1 - p_3) (1 - p_4)$
9	0	1	1	1	1	$(1 - p_1) p_2 p_3 p_4$
10	0	1	1	0	1	$(1 - p_1) p_2 p_3 (1 - p_4)$
11	0	1	0	1	0	$(1 - p_1) p_2 (1 - p_3) p_4$
12	0	1	0	0	0	$(1 - p_1) p_2 (1 - p_3) (1 - p_4)$
13	0	0	1	1	1	$(1 - p_1) (1 - p_2) p_3 p_4$
14	0	0	1	0	0	$(1 - p_1) (1 - p_2) p_3 (1 - p_4)$
15	0	0	0	1	0	$(1 - p_1) (1 - p_2) (1 - p_3) p_4$
16	0	0	0	0	0	$(1 - p_1) (1 - p_2) (1 - p_3) (1 - p_4)$

Durch geeignetes Zusammenfassen erhalten wir etwa

$$P(\varphi(k_1, k_2, k_3, k_4) = 1) = p_1 p_2 + p_1 (1 - p_2) p_4 + (1 - p_1) p_2 p_3 + (1 - p_1) (1 - p_2) p_3 p_4$$

Literatur

Hartung, J.; Elpelt, B.; Klösener, K.-H.: Statistik. Oldenburg, 8. Auflage 1991, Seiten 748-788.

Barlow, R.E.; Wu, A.S.: Coherent systems with multi-state components. Mathematics of Operations Research, Vol. 3, pp. 275–281. 1978.

El Neweihi, E.; Proschan, F.; Sethuraman, J.: Multistate coherent Systems. Journal of applied Probability, Vol. 15, pp. 675–688.

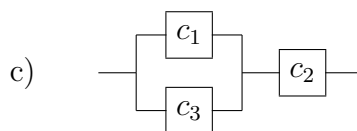
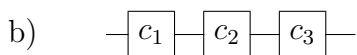
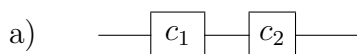
Gaede, K.-W.: Zuverlässigkeit: mathematische Modelle. Hanser Verlag, München, 1977.

Aufgaben zur Zuverlässigkeit

- 4.1 Ein Rechnernetz bestehe aus drei Komponenten c_1, c_2, c_3 . Die Wahrscheinlichkeiten für fehlerfreien Betrieb der Komponenten seien:

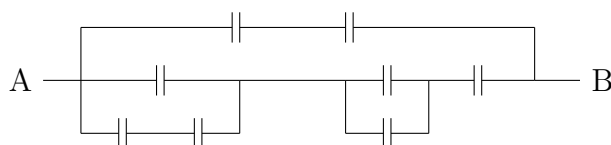
$$R_1 = \frac{4}{5} \quad R_2 = \frac{3}{4} \quad R_3 = \frac{7}{8}$$

Gesucht sind die Wahrscheinlichkeiten für den fehlerfreien Betrieb folgender Rechnernetze!



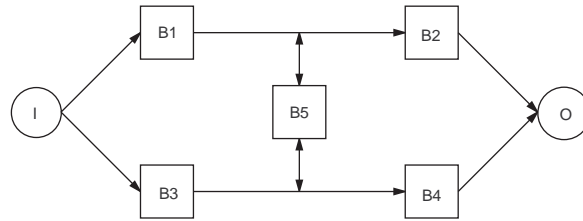
◁

- 4.2 Die Städte Ahausen und Beburg sind durch ein Netz von Übertragungskanälen über Verstärkerstationen verbunden. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kanal fehlerfrei arbeitet, ist r ('reliability', Zuverlässigkeit). Das Auftreten von Fehlern ist unabhängig. Die Kommunikation zwischen den Städten ist gewährleistet, falls im Netz mindestens ein Pfad mit fehlerfrei arbeitenden Übertragungskanälen existiert. Gegeben sei das unten skizzierte Netz. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kommunikation zwischen den Städten fehlerfrei möglich ist?
($\text{---} \parallel \text{---}$... Verstärkerstation)



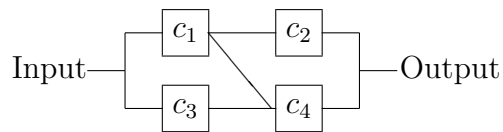
◁

- 4.3 Berechne die Zuverlässigkeit folgender Brückenschaltung aus den Bauteilen B1 bis B5, die jeweils die Zuverlässigkeit r haben; zuerst allgemein, dann mit $r = 0.9$!



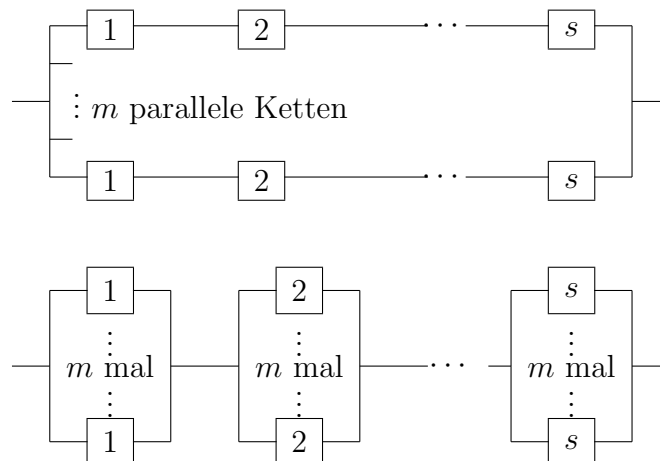
◁

- 4.4 Gegeben sei das unten angeführte System mit vier unabhängigen Komponenten. Das System funktioniert, falls mindestens ein Pfad mit fehlerfreien Komponenten existiert. Bestimme die Wahrscheinlichkeit für das Funktionieren des Systems, als Funktion der Zuverlässigkeit der einzelnen Komponenten!
(Zuverlässigkeit=Wahrscheinlichkeit der Funktionstüchtigkeit='reliability')



◁

- 4.5 Zwei mögliche Anordnungen zur Erhöhung der Zuverlässigkeit der Übertragung eines Systems mittels Redundanz sollen untersucht werden. Das System benötigt, um fehlerfrei arbeiten zu können, s identische Komponenten in Serie. Es sind $m \cdot s$ Komponenten vorhanden.



Welches der abgebildeten Schemata wird eine höhere Zuverlässigkeit garantieren?

Die Zuverlässigkeit einer einzelnen Komponente wird mit r angegeben.

Leite eine Formel für die Zuverlässigkeit der beiden Anordnungen ab!

Vergleiche beide Ausdrücke!

Simuliere (etwa in Excel) verschiedene Werte von n und m in den verschiedenen Schaltungen, mit verschiedenen Zuverlässigkeiten (für alle Komponenten jedoch der selbe Wert) und stelle das Ergebniss in mehrdimensionalen Plots dar! ◁

5 Lebensdauer und Ausfallraten

Lebensdauerverteilungen

Wir ordnen nun jeder Komponente eine Zufallsvariable zu. Wir betrachten Zufallsvariablen X , die das Funktionieren von Komponente beschreiben. D. h., wir interpretieren $P(X \leq u)$ als Wahrscheinlichkeit für das Funktionieren der Komponente X bis zu einem Zeitpunkt u .

Seien nun $P(X \leq u) = F(u)$ und $P(Y \leq u) = G(u)$ die Verteilungen zweier unabhängiger Zufallsvariablen X und Y , $f(x)$ und $g(y)$ die zugehörigen Dichten.

DEFINITION 5.1 (LEBENSDAUERVERTEILUNG)

$P(X > u) = 1 - P(X \leq u) = 1 - F(u)$ heißt *Lebensdauerverteilung*. $P(X > u)$ heißt auch *Überlebenswahrscheinlichkeit (survival probability)*. Sie ist nur auf der positiven Halbachse definiert, da negative Zeiten keinen Sinn machen.

Die bedingte Lebensdauerverteilung (*conditional survival distribution*) ist

$$P(X \leq u | X > t) = \frac{P(t < X \leq u)}{P(X > t)} = \frac{F(u) - F(t)}{1 - F(t)}$$

und ihre Dichte

$$\frac{\partial}{\partial u} P(X \leq u | X > t) = \frac{f(u)}{1 - F(t)}$$

heißt *Hazardfunktion (hazard)* oder auch *Ausfallrate (failure rate function)*.

Es gilt

$$f(u) = h(u) \cdot \exp\left(-\int_0^u h(t) dt\right)$$

$$F(u) = 1 - \exp\left(-\int_0^u h(t) dt\right)$$

$$h(u) = \frac{f(u)}{1 - F(u)}$$

d. h., wir können die Dichte und Verteilung aus der Hazardfunktion berechnen.

Weiters ist eine Funktion $h(u)$ genau dann eine Hazardfunktion einer Lebensdauerverteilung, wenn $h(u) \geq 0$ und $\int_0^\infty h(t) dt = \infty$ ist.

BEISPIEL 5.1 (LEBENSDAUER VON MEHRKOMPONENTENSYSTEMEN)

Seien zwei unabhängige Komponenten X und Y gegeben.

(a) **Seriell System**

Es fällt aus, sobald eine Komponente ausfällt, d. h., die Lebensdauer des Gesamtsystems ist $\min(X, Y)$.

(b) **Paralleles System**

Es funktioniert, solange mindestens eine Komponente funktioniert, d. h., die Lebensdauer ist $\max(X, Y)$.

(c) **Standby System**

Sobald eine Komponente versagt, wird die zweite (Standby) Komponente als Ersatz zugeschaltet. Die Lebensdauer dieses Systems ist also $X + Y$.

Wenn wir nun die Lebensdauer der obigen Systeme berechnen wollen, bzw. von beliebige serienparallele Systeme, so müssen wir Maxima und Minima von Lebensdauerverteilungen berechnen können.

Das **Maximum** der Verteilungen zweier Zufallsvariablen berechnen wir mittels

$$P(\max(X, Y) \leq u) = P(X \leq u, Y \leq u) = P(X \leq u) \cdot P(Y \leq u) = F(u) \cdot G(u)$$

$\Rightarrow \max(X, Y)$ hat die Verteilungsfunktion $F(u) \cdot G(u)$
und die Dichte $f(u)G(u) + F(u) \cdot g(u)$

Analog berechnen wir das **Minimum**:

$$P(\min(X, Y) > u) = P(X > u, Y > u) = P(X > u) \cdot P(Y > u) = (1 - F(u))(1 - G(u))$$

$\Rightarrow \min(X, Y)$ hat die Verteilungsfunktion
 $1 - (1 - F(u))(1 - G(u)) = F(u) + G(u) - F(u) \cdot G(u)$
und die Dichte $(1 - F(u)) \cdot g(u) + (1 - G(u)) \cdot f(u)$

Die Hazardfunktion des Minimums ist:

$$h_{\min} = \frac{(1 - F(u)) \cdot g(u) + (1 - G(u)) \cdot f(u)}{(1 - F(u))(1 - G(u))} = \frac{g(u)}{1 - G(u)} + \frac{f(u)}{1 - F(u)} = h_X(u) + h_Y(u)$$

also die Summe der beiden Hazardfunktionen.

Wir können nun leicht die Lebensdauern von Mehrkomponentensystemen berechnen:

BEISPIEL 5.2 (EXPONENTIALVERTEILUNG)

Seien zwei Komponenten X und Y mit zufälligen Lebensdauern gegeben, die exponentialverteilt sind mit Parametern λ bzw. μ . $E(X) = 10 = \frac{1}{\lambda}$ und $E(Y) = 8 = \frac{1}{\mu}$.

Wir berechnen die mittlere Lebensdauer des Gesamtsystems (MTTF oder *mean time to failure*):

(a) **Seriell System**

$$\begin{aligned} \min(X, Y) &\sim (\lambda + \mu)e^{-(\lambda + \mu)u} \\ E(\min(X, Y)) &= \frac{1}{\lambda + \mu} = \frac{1}{\frac{1}{10} + \frac{1}{8}} = \frac{40}{9} = 4.4 \end{aligned}$$

(b) **Paralleles System**

$$\begin{aligned} \max(X, Y) &\sim (1 - e^{-\lambda u})(1 - e^{-\mu u}) = 1 - e^{-\lambda u} - e^{-\mu u} + e^{-(\lambda + \mu)u} \\ E(\max(X, Y)) &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda u} + e^{-\mu u} - e^{-(\lambda + \mu)u} du \\ &= \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda + \mu} = 10 + 8 - 4.44 = 13.56 \end{aligned}$$

(c) **Standby System**

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = 10 + 8 = 18$$

Die Lebensdauererzeugung größerer Systeme werden rekursiv berechnet, d. h., das Gesamtsystem wird in Einzelsysteme zerlegt und wieder zusammengesetzt.

Lebensdauer bei diskreten Zufallsvariablen

Ausfallraten (Hazards) machen auch bei diskreten Zufallsvariablen Sinn.

BEISPIEL 5.3

Sei ein Lagerbestand von 100 Harddisks eines Typs gegeben. Wir betrachten den Verkauf aller Harddisks (den „Ausfall“).

	Lager	$p_i = P(\text{Ausfall})$	Hazard h_i
Anfang Monat 1	100		
Anfang Monat 2	80	0.20	$0.20 = \frac{0.2}{1} = \frac{20}{100}$
Anfang Monat 3	40	0.40	$0.50 = \frac{0.4}{0.8} = \frac{40}{80}$
Anfang Monat 4	10	0.30	$0.75 = \frac{0.3}{0.4} = \frac{30}{40}$
Anfang Monat 5	0	0.10	$1.00 = \frac{0.1}{0.1} = \frac{10}{10}$
	Summe	1.00	

Der Hazard bezieht sich also immer auf den (absoluten) Ausfall bezogen auf den zuletzt aktuellen Stand. Der letzte Hazard muss natürlich nicht 1 sein, denn es könnte ein Restbestand bleiben. Die Ausfallswahrscheinlichkeiten müssen sich allerdings zu 1 summieren.

Es gilt

$$h_1 = p_1, \quad h_i = \frac{p_i}{1 - \sum_{k=1}^{i-1} p_k} \quad \text{und} \quad p_1 = h_1, \quad p_i = \left(1 - \sum_{k=1}^{i-1} p_k\right) h_i.$$

Aus den Daten können wir nun die *erwartete Lebensdauer* einer Komponente berechnen, indem wir einfach den Erwartungswert obiger Dichte bzw. Verteilung berechnen. In unserem Beispiel wäre das

$$E(X) = 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.4 + 3 \cdot 0.3 + 4 \cdot 0.1 = 2.3$$

und somit ist der mittlere Verkaufszeitpunkt 2.3, liegt also im dritten Monat. Wie wir an Hand der Daten sehen stimmt das möglicherweise nicht ganz. Das liegt daran, dass die Harddisks nicht am Ende des Monats, sondern während des Monats verkauft werden. Daher ist es üblich, den Erwartungswert über die Monatsmitten zu rechnen, d. h. also

$$E(X) = 0.5 \cdot 0.2 + 1.5 \cdot 0.4 + 2.5 \cdot 0.3 + 3.5 \cdot 0.1 = 1.8,$$

der Verkauf der ersten 50 % ist also bis Mitte zum 24. Tag ($0.8 \cdot 30$) des zweiten Monats zu erwarten.

Aufgaben zur Lebensdauer

- 5.1 Ein Computerhändler kauft 1000 Harddisks der Marke Spin'n'Crash zu Okkasionspreisen und verkauft den gesamten Lagerbestand innerhalb von 5 Monaten. Er beobachtet dabei folgenden Lagerbestand am Anfang jeden Monats.

Monat	0	1	2	3	4	5
Bestand	1000	800	600	200	100	0

- Berechne die monatlichen Verkaufswahrscheinlichkeiten!
- Berechne die monatlichen (diskreten) Hazardwerte!
- Berechne den erwarteten Verkaufszeitpunkt für eine Harddisk!
- Wie ändert sich der erwartete Verkaufszeitpunkt, wenn obige Lagerbestände in den Monatsmitten beobachtet werden?

◁

- 5.2 Gegeben sind folgende Hazards einer Lebensdauervertelung von elektronischen Bauteilen:

Jahr	1	2	3	4	5
Hazard	0.1	0.3	0.5	0.5	0.5

- Berechne die erwartete Lebensdauer!
- Berechne die erwartete Lebensdauer eines 3 Jahre alten Bauteils!

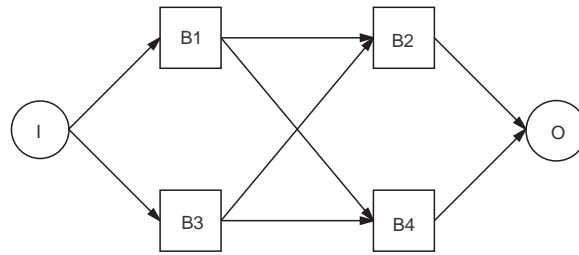
◁

- 5.3 Die Lebensdauer dreier, in Serie geschalteter Prozessoren hat die Dichte

$$f(u) = \frac{1}{(1+u)^2} \quad u \geq 0$$

Berechne die Verteilungsfunktion und die erwartete Lebensdauer des Gesamtsystems! ◁

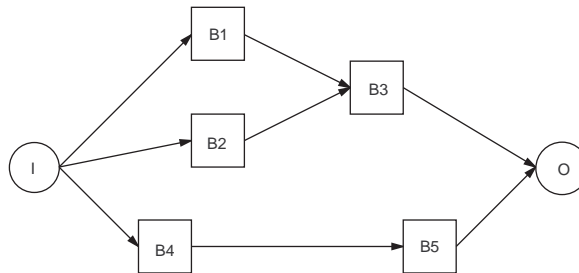
5.4 Folgendes Systems besteht aus den Bauteilen **B1** bis **B4**, die Lebensdauer X_1 bis X_4 haben, die nach den Verteilungsfunktionen G_1 bis G_4 verteilt sind!



- Beschreibe die Gesamtlebensdauer X als Funktion von X_1, \dots, X_4 !
- Stelle die Verteilungsfunktion der Gesamtlebensdauer G als Funktion der G_1, \dots, G_4 dar!

◁

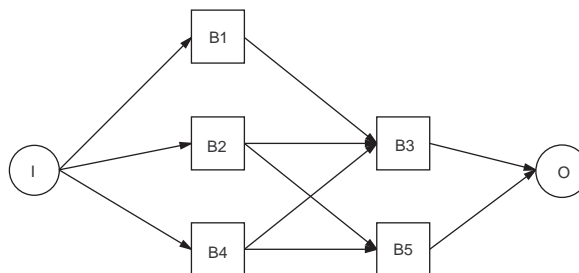
5.5 Folgendes Systems besteht aus den Bauteilen **B1** bis **B5**, die Lebensdauer X_1 bis X_5 haben, die nach den Verteilungsfunktionen G_1 bis G_5 verteilt sind!



- Beschreibe die Gesamtlebensdauer X als Funktion von X_1, \dots, X_5 !
- Stelle die Verteilungsfunktion der Gesamtlebensdauer G als Funktion der G_1, \dots, G_5 dar!

◁

5.6 Folgendes Systems besteht aus den Bauteilen **B1** bis **B5**, die Lebensdauer X_1 bis X_5 haben, die nach den Verteilungsfunktionen G_1 bis G_5 verteilt sind!



- a) Beschreibe die Gesamtlebensdauer X als Funktion von X_1, \dots, X_5 !
- b) Stelle die Verteilungsfunktion der Gesamtlebensdauer G als Funktion der G_1, \dots, G_5 dar!
- c) berechne die Zuverlässigkeit, wenn jeder Bauteil die Zuverlässigkeit $r = 0.85$ hat!

◁